

<4> Lösungen der Übungsaufgaben aus Kapitel 23

**(1) Zeigen Sie, dass das Quadrat eines standardisierten Diskriminationskoeffizienten in dem zweidimensionalen Modell in Abbildung 23.1 genau der Reliabilität entspricht.**

Im Modell in Abbildung 23.1 lässt sich eine beobachtete Variable wie folgt zerlegen:

$Y_i = \alpha_i + \lambda_{ij} \cdot \eta_j + \varepsilon_i$ . Nach den Rechenregeln F 7.34 und F 7.35 für Varianzen und dem Sachverhalt, dass eine latente Variable  $\eta_j$  mit einer Fehlervariablen unkorreliert ist, ergibt sich folgende Varianzzerlegung:

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_i) &= \text{Var}(\alpha_i + \lambda_{ij} \cdot \eta_j + \varepsilon_i) \\ &= \lambda_{ij}^2 \cdot \text{Var}(\eta_j) + \text{Var}(\varepsilon_i) + 2 \cdot \lambda_{ij} \cdot \text{Cov}(\eta_j, \varepsilon_i) \\ &= \lambda_{ij}^2 \cdot \text{Var}(\eta_j) + \text{Var}(\varepsilon_i) \end{aligned}$$

Hieraus folgt für die Reliabilität:

$$\text{Rel}(Y_i) = \frac{\lambda_{ij}^2 \cdot \text{Var}(\eta_j)}{\text{Var}(Y_i)}$$

Sind sowohl die beobachteten Variablen  $Y_i$  als auch die latenten Variablen  $\eta_j$  standardisiert, so sind ihre Varianzen gleich 1. Hieraus folgt, dass dann die Reliabilität dem quadrierten standardisierten Diskriminationsparameter entspricht.

- (2) Zeigen Sie, dass die Reliabilität der manifesten Variablen auch bestimmt werden kann, indem man die standardisierte Fehlervarianz von dem Wert 1 abzieht.**

Die Reliabilität lässt sich im Allgemeinen wie folgt anhand der Fehlervarianz bestimmen:

$$Rel(Y_i) = 1 - \frac{Var(\varepsilon_i)}{Var(Y_i)}. \text{ Im Falle der Standardisierung der Variablen } Y_i \text{ und } \eta_j, \text{ ist die Varianz}$$

der beobachteten Variablen gleich 1 und die Reliabilität erhält man somit, indem man von 1 die Fehlervarianz im standardisierten Modell abzieht.

- (3) Geben Sie das Modell in Abbildung 23.2 in matrixalgebraischer Form an, indem Sie die Struktur der einzelnen Vektoren und Matrizen berichten.**

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Lambda}' + \boldsymbol{\theta}$$

mit

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ \lambda_{21} & 0 \\ \lambda_{31} & 0 \\ \lambda_{41} & \lambda_{42} \\ \lambda_{51} & \lambda_{52} \\ \lambda_{61} & \lambda_{62} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} Var(\eta_1) & 0 \\ 0 & Var(\eta_2) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} Var(\varepsilon_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Var(\varepsilon_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Var(\varepsilon_3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Var(\varepsilon_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Var(\varepsilon_5) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Var(\varepsilon_6) \end{bmatrix}$$

- (4) Zeigen Sie unter Anwendung der Rechenregeln für Varianzen und Kovarianzen, dass die Gleichungen F 23.13 bis F 23.15 aus den Gleichungen  $Y_1 = \alpha_1 + \lambda_{11} \cdot \eta_1 + \varepsilon_1$ , und  $Y_2 = \alpha_2 + \lambda_{21} \cdot \eta_1 + \varepsilon_2$  folgen.**

Nach den Rechenregeln F 7.34 und F 7.35 für Varianzen und dem Sachverhalt, dass eine latente Variable  $\eta_j$  mit einer Fehlervariablen unkorreliert ist, ergeben sich folgende Varianzzerlegungen:

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_1) &= \text{Var}(\alpha_1 + \lambda_{11} \cdot \eta_1 + \varepsilon_1) \\ &= \lambda_{11}^2 \cdot \text{Var}(\eta_1) + \text{Var}(\varepsilon_1) + 2 \cdot \lambda_{11} \cdot \text{Cov}(\eta_1, \varepsilon_1) \\ &= \lambda_{11}^2 \cdot \text{Var}(\eta_1) + \text{Var}(\varepsilon_1) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_2) &= \text{Var}(\alpha_2 + \lambda_{21} \cdot \eta_1 + \varepsilon_2) \\ &= \lambda_{21}^2 \cdot \text{Var}(\eta_1) + \text{Var}(\varepsilon_2) + 2 \cdot \lambda_{21} \cdot \text{Cov}(\eta_1, \varepsilon_2) \\ &= \lambda_{21}^2 \cdot \text{Var}(\eta_1) + \text{Var}(\varepsilon_2) \end{aligned}$$

Für die Kovarianz gilt:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_1, Y_2) &= \text{Cov}(\alpha_1 + \lambda_{11} \cdot \eta_1 + \varepsilon_1, \alpha_2 + \lambda_{21} \cdot \eta_1 + \varepsilon_2) = \text{Cov}(\lambda_{11} \cdot \eta_1 + \varepsilon_1, \lambda_{21} \cdot \eta_1 + \varepsilon_2) \\ &= \lambda_{11} \cdot \lambda_{21} \cdot \text{Cov}(\eta_1, \eta_1) + \lambda_{11} \cdot \text{Cov}(\eta_1, \varepsilon_2) + \lambda_{21} \cdot \text{Cov}(\varepsilon_1, \eta_1) + \text{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ &= \lambda_{11} \cdot \lambda_{21} \cdot \text{Cov}(\eta_1, \eta_1) = \lambda_{11} \cdot \lambda_{21} \cdot \text{Var}(\eta_1) \end{aligned}$$

- (5) Berechnen Sie die in den Abbildungen 23.1 und 23.2 dargestellten Modelle mittels eines Computerprogramms für konfirmatorische Faktormodelle (lineare Strukturgleichungsmodelle) anhand des Datensatzes in der Datei Kapitel-23.dat, die in den Online-Materialien zu Kapitel 23 zu finden ist.**

Die Lösungen entsprechen den in Kapitel 23 in den Abbildungen 23.1 und 23.2 berichteten Ergebnissen.